

עבודת בית א'

1. בסעיפים הבאים, תשתמשי בפולנום Taylor $P_3(x)$ סביב הנקודה x_0 כדי למצוא קירוב לערך $f(x_1)$ של הפונקציה $f(x)$. מהי הערכת השארית $|R_3(x_1)|$ בצורת Lagrange! מצאי את הערך של n שעבורו $|R_n(x_1)| < 10^{-4}$.

$$x_1 = 0.5, x_0 = 0, f(x) = e^x \quad (\text{א})$$

$$x_1 = 1.2, x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (\text{ב})$$

$$x_1 = 37^\circ, x_0 = \frac{\pi}{6}, f(x) = \sin x \quad (\text{ג})$$

$$x_1 = 10^\circ, x_0 = 0, f(x) = \cos x \quad (\text{ד})$$

$$x_1 = 1.5, x_0 = 0, f(x) = \ln(1+x) \quad (\text{ה})$$

2. מצאי את טור Taylor של הפונקציה $f(x)$. קבעי את תחום ההתכנסות. ניתן להשתמש בפיתוח

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{עבור } -1 < x < 1.$$

$$x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{א})$$

$$x_0 = -3, f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (\text{ב})$$

$$x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{1+2x} \quad (\text{ג})$$

$$x_0 = 2, f(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{ד})$$

3. מצאי את טור Maclaurin של הפונקציה $f(x)$. ניתן להשתמש בפיתוח $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$f(x) = e^{2x} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = e^{-x} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = e^{x^2} \quad (\text{ג})$$

4. מצאי טור Maclaurin עבור $f'(x)$ ו- $\int_0^x f(t) dt$ כאשר $f(x) = e^{-x^2}$

עבודת בית ב'

- נתונים 3 נקודות על המישור: $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $(x_1, y_1) = (4, 2)$, $(x_2, y_2) = (5, 4)$.
 - מצאי את פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור הנתונים הנ"ל. שרטט את הגרף של $P_2(x)$.
 - חשבי את המספרים $P_2(0)$, $P_2(3)$, $P_2(6)$.
 - מצאי את פולינום הריבועי ישיר, ללא שימוש בנוסחת אינרפולצית Lagrange.
- נתונות 2 נקודות, (x_0, y_0) ו- (x_1, y_1) . מצאי את פולינום Lagrange $P_1(x)$ עבור הנקודות האלו.
 - מה השיפוע של הגרף של $P_1(x)$?
- עבור הפונקציה $f(x) := 2x^3 + 2x^2 + 1$
 - חשבי את המספרים $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
 - תשתמשי את החישוב הנ"ל כדי למצוא פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור $f(x)$.
 - מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $1 \leq x \leq 3$?
- עבור הפונקציה $f(x) := 2^x$
 - חשבי את המספרים $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.
 - תשתמשי את החישוב הנ"ל כדי למצוא פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור $f(x)$.
 - מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $x = 0.5$, $x = 2.0$, $x = 4.0$?
 - מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $0 \leq x \leq 3$?
- עבור הפונקציה $f(x) := x + \ln(x + 2)$
 - חשבי את המספרים $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
 - תשתמשי את החישוב הנ"ל כדי למצוא פולינום Lagrange $P_3(x)$ עבור $f(x)$.
 - תשתמשי את הפולינום $P_3(x)$ כדי למצוא קירובים לערכים $f(0.5)$ ו- $f(2.8)$ ומצאי את רמת הדיוק עבורם.

עבודת בית ג'

עבור כל האינטגרל הנתון

(א) שרטט את גרף הפונקציה מעל קטע האינטגרציה

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

(ב) תחלק את קטע האינטגרציה ב- n חלקים שווים ותחבר טבלה

$$y_i = f(x_i) \text{ כאשר}$$

(ג) חשבי את האינטגרל לפי שיטת הטרפז.

(ד) חשבי את האינטגרל לפי שיטת Simpson.

(ה) חשבי את האינטגרל בשימוש נוסחת Newton—Leibniz.

(ו) חשבי את שגיאה Δ_1 שקיבלתי כדי שימוש בשיטת הטרפז, את שגיאה Δ_2 שקיבלתי בשימוש שיטת Simpson.

(ז) מצאי איזה n צריך לקחת כדי להגיע לרמת הדיוק $d = 0.001$ לפי שתי השיטות הנומוריות.

$$1. \quad n = 2, \int_0^6 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$2. \quad n = 4, \int_{0.5}^{2.5} \frac{dx}{x}$$

$$3. \quad n = 6, \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

עבור כל האינטגרל הנתון

(א) שרטט את גרף הפונקציה מעל קטע האינטגרציה

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

(ב) תחלק את קטע האינטגרציה ב- n חלקים שווים ותחבר טבלה

$$y_i = f(x_i) \text{ כאשר}$$

(ג) חשבי את האינטגרל לפי שיטת הטרפז.

(ד) חשבי את האינטגרל לפי שיטת Simpson.

$$4. \quad n = 2, \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$5. \quad n = 4, \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

עבודת בית ד'

1. בסעיפים הבאים, תסביר למה ניתן להשתמש בשיטת החציה. תשתמש את השיטה הזאת כדי למצוא את הקירוב למספרים הבאים עם רמת הדיוק d .

(א) $d = 0.1, \sqrt[3]{5}$

(ב) הפתרון למשוואה $4x - \cos(x) = 1$ הנמצא בקטע $[0, 1]$, $d = 0.02$

(ג) הפתרון הקטן ביותר למשוואה $x^3 - x - 1 = 0$, $d = 5\%$

2. בסעיפים הבאים, מצא את הקירוב לשורש של המשוואה הנתונה בעזרת שיטת סקנט.

(א) $x^6 - x - 1 = 0$

(ב) $x - 2 \sin x = 0$ תקחי $x_0 = \pi, x_1 = \frac{\pi}{2}, n = 4$

3. בסעיפים הבאים, מצא את n איטרציות של תהליך Newton—Raphson כדי למצוא את הקירוב למספרים הבאים וקבעי את רמת הדיוק של תשובתך.

(א) $n = 3, \sqrt{3}$ תקחי $x_0 = 3$

(ב) $n = 3, \sqrt[3]{9}$ תקחי $x_0 = 2$

4. נתונה משוואה $\arctan(x) = x - 1$.

(א) כמה פתרונות יש למשוואה? נמקי את תשובתך.

(ב) תבחרי קטע מתאים לחיפוש הפתרון החיובי למשוואה. לפי בחירת הקטע, כמה צעדי שיטת החציה צריך לבצע כדי למצוא את הפתרון עד לרמת הדיוק $d = 0.01$?

(ג) בשימוש שיטת Newton—Raphson, מצא י את הפתרון החיובי למשוואה עם רמת הדיוק $d = 0.01$.

(ד) בשימוש שיטת הסקנט, מצא י את הפתרון החיובי למשוואה עם רמת הדיוק $d = 0.01$.

עבודת בית ה'

1. מצאי את פתרון המערכת בעזרת שיטת Gauß:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -3 \\ 4x_1 - 5x_2 = 6 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -9 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

2. קבעי האם המטריצה A ניתנת לפירוק LU . אם כן, מצאי את הפירוק LU עבור מטריצה A ומצאי את הפתרון למשוואה לינארית $Ax = b$ בעזרת הפירוק כאשר

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{א})$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ד})$$

עבודת בית ו'

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 1. \text{ מצאי את } \|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_3, \|x\|_4, \|x\|_\infty \text{ עבור}$$

$$2. \text{ הוכיח כי } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$3. \text{ הוכיח כי } \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$4. \text{ הוכיח כי } \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$5. \text{ מצאי את } \|f\|_1, \|f\|_2, \|f\|_3, \|f\|_4, \|f\|_\infty \text{ כאשר}$$

$$(א) \quad f(x) := x + 2 \text{ בתחום } [-1, 2]$$

$$6. \text{ מצאי את } \|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty \text{ כאשר}$$

$$(א) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ב) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

7. לאחר בדיקת דומיננטיות שורה של המטריצה A , תשתמש בשיטת Gauss–Jacobi כדי למצוא את הפתרון למערכת הנתונה עד לרמת הדיוק $d = 0.5$.

$$A = \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 \end{cases} \quad (א)$$

$$A = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases} \quad (ב)$$

$$A = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - 3x_3 = 5 \end{cases} \quad (ג)$$

$$A = \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \end{cases} \quad (ד)$$