

עבודת בית א'

1. בסעיפים הבאים, תשתמש בפולנום Taylor $P_3(x)$ סביב הנקודה x_0 כדי למצוא קירוב לערך $f(x_1)$ של הפונקציה $f(x)$. מהי הערכת השארית $|R_3(x_1)|$ בצורת Lagrange! מצא את הערך של n שעבורו $|R_n(x_1)| < 10^{-4}$.

$$x_1 = 0.5, x_0 = 0, f(x) = e^x \quad (\text{א})$$

$$x_1 = 1.2, x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (\text{ב})$$

$$x_1 = 37^\circ, x_0 = \frac{\pi}{6}, f(x) = \sin x \quad (\text{ג})$$

$$x_1 = 10^\circ, x_0 = 0, f(x) = \cos x \quad (\text{ד})$$

$$x_1 = 1.5, x_0 = 0, f(x) = \ln(1+x) \quad (\text{ה})$$

2. מצא את טור Taylor של הפונקציה $f(x)$. קבע את תחום ההתכנסות. ניתן להשתמש בפיתוח

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{עבור } -1 < x < 1.$$

$$x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{א})$$

$$x_0 = -3, f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (\text{ב})$$

$$x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{1+2x} \quad (\text{ג})$$

$$x_0 = 2, f(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{ד})$$

3. מצא את טור Maclaurin של הפונקציה $f(x)$. ניתן להשתמש בפיתוח $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$f(x) = e^{2x} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = e^{-x} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = e^{x^2} \quad (\text{ג})$$

4. מצא טור Maclaurin עבור $f'(x)$ ו- $\int_0^x f(t) dt$ כאשר $f(x) = e^{-x^2}$

עבודת בית ב'

1. נתונים 3 נקודות על המישור: $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $(x_1, y_1) = (4, 2)$, $(x_2, y_2) = (5, 4)$.
 - (א) מצא את פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור הנתונים הנ"ל. שרטט את הגרף של $P_2(x)$.
 - (ב) חשב את המספרים $P_2(0)$, $P_2(3)$, $P_2(6)$.
 - (ג) מצא את פולינום הריבועי ישיר, ללא שימוש בנוסחת אינרפולצית Lagrange.
2. נתונות 2 נקודות, (x_0, y_0) ו- (x_1, y_1) . מצא את פולינום Lagrange $P_1(x)$ עבור הנקודות האלו.
 - מה השיפוע של הגרף של $P_1(x)$?
3. עבור הפונקציה $f(x) := 2x^3 + 2x^2 + 1$
 - (א) חשב את המספרים $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
 - (ב) תשתמש את החישוב הנ"ל כדי למצוא פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור $f(x)$.
 - (ג) מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $1 \leq x \leq 3$?
4. עבור הפונקציה $f(x) := 2^x$
 - (א) חשב את המספרים $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.
 - (ב) תשתמש את החישוב הנ"ל כדי למצוא פולינום Lagrange $P_2(x)$ עבור $f(x)$.
 - (ג) מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $x = 0.5$, $x = 2.0$, $x = 4.0$?
 - (ד) מהי הערכה ל- $|R_2(x)|$ עבור $0 \leq x \leq 3$?
5. עבור הפונקציה $f(x) := x + \ln(x + 2)$
 - (א) חשב את המספרים $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.
 - (ב) תשתמש את החישוב הנ"ל כדי למצוא פולינום Lagrange $P_3(x)$ עבור $f(x)$.
 - (ג) תשתמש את הפולינום $P_3(x)$ כדי למצוא קירובים לערכים $f(0.5)$ ו- $f(2.8)$ ומצא את רמת הדיוק עבורם.

עבודת בית ג'

עבור כל האינטגרל הנתון

(א) שרטט את גרף הפונקציה מעל קטע האינטגרציה

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

(ב) תחלק את קטע האינטגרציה ב- n חלקים שווים ותחבר טבלה

$$y_i = f(x_i) \text{ כאשר}$$

(ג) חשב את האינטגרל לפי שיטת הטרפז.

(ד) חשב את האינטגרל לפי שיטת Simpson.

(ה) חשב את האינטגרל בשימוש נוסחת Newton—Leibniz.

(ו) חשב את שגיאה Δ_1 שקיבלת כדי שימוש בשיטת הטרפז, את שגיאה Δ_2 שקיבלת בשימוש שיטת Simpson.

(ז) מצא איזה n צריך לקחת כדי להגיע לרמת הדיוק $d = 0.001$ לפי שתי השיטות הנומוריות.

$$1. \quad n = 2, \int_0^6 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$2. \quad n = 4, \int_{0.5}^{2.5} \frac{dx}{x}$$

$$3. \quad n = 6, \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

עבור כל האינטגרל הנתון

(א) שרטט את גרף הפונקציה מעל קטע האינטגרציה

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

(ב) תחלק את קטע האינטגרציה ב- n חלקים שווים ותחבר טבלה

$$y_i = f(x_i) \text{ כאשר}$$

(ג) חשב את האינטגרל לפי שיטת הטרפז.

(ד) חשב את האינטגרל לפי שיטת Simpson.

$$4. \quad n = 2, \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$5. \quad n = 4, \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

עבודת בית ד'

1. בסעיפים הבאים, תסביר למה ניתן להשתמש בשיטת החציה. תשתמש את השיטה הזאת כדי למצוא את הקירוב למספרים הבאים עם רמת הדיוק d .

(א) $d = 0.1, \sqrt[3]{5}$

(ב) הפתרון למשוואה $4x - \cos(x) = 1$ הנמצא בקטע $[0, 1]$, $d = 0.02$

(ג) הפתרון הקטן ביותר למשוואה $x^3 - x - 1 = 0$, $d = 5\%$

2. בסעיפים הבאים, מצא את הקירוב לשורש של המשוואה הנתונה בעזרת שיטת סקנט.

(א) $x^6 - x - 1 = 0$

(ב) $x - 2 \sin x = 0$ תקח $x_0 = \pi$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $n = 4$

3. בסעיפים הבאים, מצא את n איטרציות של תהליך Newton—Raphson כדי למצוא את הקירוב למספרים הבאים וקבע את רמת הדיוק של תשובתך.

(א) $n = 3$, תקח $x_0 = 3, \sqrt{3}$

(ב) $n = 3$, תקח $x_0 = 2, \sqrt[3]{9}$

4. נתונה משוואה $\arctan(x) = x - 1$.

(א) כמה פתרונות יש למשוואה? נמק את תשובתך.

(ב) תבחר קטע מתאים לחיפוש הפתרון החיובי למשוואה. לפי בחירת הקטע, כמה צעדי שיטת החציה צריך לבצע כדי למצוא את הפתרון עד לרמת הדיוק $d = 0.01$?

(ג) בשימוש שיטת Newton—Raphson, מצא את הפתרון החיובי למשוואה עם רמת הדיוק $d = 0.01$.

(ד) בשימוש שיטת הסקנט, מצא את הפתרון החיובי למשוואה עם רמת הדיוק $d = 0.01$.

עבודת בית ה'

1. מצא את פתרון המערכת בעזרת שיטת Gauss:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -3 \\ 4x_1 - 5x_2 = 6 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -9 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

2. קבע האם המטריצה A ניתנת לפירוק LU . אם כן, מצא את הפירוק LU עבור מטריצה A ומצא את הפתרון למשוואה לינארית $Ax = b$ בעזרת הפירוק כאשר

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{א})$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ד})$$

עבודת בית ו'

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 1. \text{ מצא את } \|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_3, \|x\|_4, \|x\|_\infty \text{ עבור}$$

$$2. \text{ הוכח כי } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$3. \text{ הוכח כי } \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$4. \text{ הוכח כי } \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \text{ עבור כל } x \in \mathbb{R}^n$$

$$5. \text{ מצא את } \|f\|_1, \|f\|_2, \|f\|_3, \|f\|_4, \|f\|_\infty \text{ כאשר}$$

$$(א) f(x) := x + 2 \text{ בתחום } [-1, 2]$$

$$6. \text{ מצא את } \|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty \text{ כאשר}$$

$$(א) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ב) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

7. לאחר בדיקת דומיננטיות שורה של המטריצה A , תשתמש בשיטת Gauss—Jacobi כדי למצוא את הפתרון למערכת הנתונה עד לרמת הדיוק $d = 0.5$.

$$A = \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 11 \end{cases} \quad (א)$$

$$A = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases} \quad (ב)$$

$$A = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - 3x_3 = 5 \end{cases} \quad (ג)$$

$$A = \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \end{cases} \quad (ד)$$

עבודת בית ז'

x_0	x_1	x_2	x_3
1	2	4	6
2	4	3	5
y_0	y_1	y_2	y_3

1. נתונות נקודות

(א) מצא את הספליין $S(x)$ מסדר ראשון. שרטט את הגרף של $S(x)$.

(ב) מצא את הספליין $S(x)$ מסדר שני. תשתמש בתנאי $S'(1) = 0$. שרטט את הגרף של $S(x)$.

(ג) מצא את הספליין $S(x)$ מסדר שני. תשתמש בתנאי $S''(1) = S''(6) = 0$. שרטט את הגרף של $S(x)$.

2. תשתמש בערכים של הפונקציה $\sin(x)$ בנקודות $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ כדי לבנות ספליין רבועי בעמצאות פולינומים ממורכזים. הצג את הספליין שקיבלת בצורה תקינה (ז"א כפונקציה של x).